INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
A L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1983. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION
DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Notations. — Soit K un corps commutatif et V un espace vectoriel de dimension finie sur K. On note $\mathcal{L}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V. On note I l'application identique de V ; on note fg le produit des éléments f et g de $\mathcal{L}(V)$; on note f^q le produit de q éléments de $\mathcal{L}(V)$ identiques à f, et par convention $f^0 = I$.

Si X est un espace vectoriel de dimension finie, on note dim (X) sa dimension.

Si f est une application linéaire on note respectivement $\mathrm{Im}f$, $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{rg}f$, son image, son noyau et son rang.

Si A est une partie d'un espace vectoriel on note Vect (A) le sous-espace vectoriel engendré par A.

A. IDÉAUX DE $\mathcal{L}(V)$

On dit que la partie M de $\mathcal{L}(V)$ est un idéal à gauche lorsque M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ et que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(V) \quad \forall f \in M \quad \varphi f \in M$$

On dit que la partie M de $\mathcal{L}(V)$ est un idéal à droite lorsque M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ et que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(V) \quad \forall f \in M \quad f\varphi \in M$$

Soit W un sous-espace vectoriel de V; on note J_W l'ensemble des endomorphismes de V dont l'image est contenue dans W et K_W l'ensemble des endomorphismes de V dont le noyau contient W.

Soit f un élément de $\mathcal{L}(V)$, on note Δ_f l'ensemble des $f\varphi$ où φ décrit $\mathcal{L}(V)$, et Γ_f l'ensemble des φf où φ décrit $\mathcal{L}(V)$.

1.*a*. Soit f un élément de $\mathcal{L}(V)$. Montrer que Δ_f est un idéal à droite et Γ_f un idéal à gauche.

b. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Montrer que J_W est un idéal à droite et K_W un idéal à gauche.

2.*a*. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Exprimer $\dim(J_W)$ et $\dim(K_W)$ en fonction de $\dim(V)$ et $\dim(W)$.

b. Soit f un endomorphisme de V. Exprimer $\dim(\Delta_f)$ et $\dim(\Gamma_f)$ à l'aide de $\mathrm{rg}\, f$ et de $\dim(V)$.

c. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$. Montrer qu'il existe f dans J_W telle que $\Delta_f = J_W$ et g dans K_W telle que $\Gamma_g = K_W$.

3. Soit W, W' des sous-espaces vectoriels de V.

a. Montrer que $J_W \cap J_{W'} = J_{W \cap W'}$ et $K_W \cap K_{W'} = K_{W+W'}$.

b. Montrer que $J_W + J_{W'} = J_{W+W'}$ et $K_W + K_{W'} = K_{W \cap W'}$.

4.*a*. Soit M un idéal à droite de $\mathcal{L}(V)$. Soit W un sous-espace vectoriel de V tel que $J_W \subset M$ et tel qu'aucun sous-espace W' de V ne vérifie $J_{W'} \subset M$ et $\dim W' > \dim W$. Montrer que $J_W = M$.

b. Soit M un idéal à gauche de $\mathcal{L}(V)$. Montrer de même qu'il existe un sous-espace vectoriel W de V tel que $K_W = M$.

c. Conclure de cette étude que pour tout idéal à droite M de $\mathcal{L}(V)$ il existe f dans $\mathcal{L}(V)$ telle que $\Delta_f = M$ et que pour tout idéal à gauche M de $\mathcal{L}(V)$ il existe g dans $\mathcal{L}(V)$ telle que $\Gamma_g = M$.

5.*a*. Soit U et W des sous-espaces vectoriels de V. Calculer $\dim(J_U \cap K_W)$.

b. Montrer que $\{0\}$ et $\mathcal{L}(V)$ sont les seules parties de $\mathcal{L}(V)$ qui sont à la fois idéal à gauche et idéal à droite.

.../...

B. Bases stables de $\mathcal{L}(V)$.

On suppose ici que la dimension de V est un entier n, au moins égal à 2.

On appelle ici base de $\mathcal{L}(V)$, toute *partie* de $\mathcal{L}(V)$ à la fois libre et génératrice. Une base S de $\mathcal{L}(V)$ est dite stable lorsqu'elle vérifie :

$$\forall f,\ g \in S \quad fg \in S \text{ ou } fg = 0$$

Soit B la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de V. La base S de $\mathcal{L}(V)$ est dite canoniquement associée à B lorsqu'il existe une bijection $(i,j) \longmapsto f_{ij}$ de $\{1,\ldots,n\}^2$ sur S telle que:

$$\forall i,j,k \in \{1,\ldots,n\} \quad f_{ij}(e_k) = 0 \quad \text{si } j \neq k$$
$$= e_i \quad \text{si } j = k.$$

1. Montrer que toute base de $\mathcal{L}(V)$ canoniquement associée à une base de V est stable.

Soit S une base stable de $\mathcal{L}(V)$ et soit r le minimum du rang des éléments de S. Soit S' l'ensemble des f de S telles que $\operatorname{rg} f = r$.

2. Montrer que $(\forall g \in S)\ (\forall f \in S')\ (gf \in S' \text{ ou } gf = 0)$ et $(fg \in S' \text{ ou } fg = 0)$. En utilisant A.5.*b*., montrer que Vect (S') $= \mathcal{L}(V)$ puis que $S' = S$.

Tous les éléments de S ont donc le même rang, r.

3. On veut montrer dans cette question que $r < n$.

a. Montrer que si l'élément φ de $\mathcal{L}(V)$ vérifie $\forall h \in \mathcal{L}(V)\ \varphi h = h\varphi$, alors $\exists \lambda \in K \quad \varphi = \lambda I$.

b. Soit $\varphi = \sum_{f \in S} f$. Montrer que si l'on avait $r = n$ alors on aurait

$$\forall g \in S \qquad \varphi g = g\varphi = \varphi.$$

c. Conclure.

On note désormais $\mathcal{J}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels U de V tels qu'il existe au moins un élément f de S vérifiant $\operatorname{Im} f = U$; on note $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels W de S tels qu'il existe au moins un élément f de S vérifiant $\operatorname{Ker} f = W$.

Pour tout U de $\mathcal{J}$ et pour tout W de $\mathcal{M}$ on note S_U l'ensemble des f de S telles que $\operatorname{Im} f = U$ et S^W l'ensemble des f de S telles que $\operatorname{Ker} f = W$.

4.*a*. Montrer que Vect $(S_U) = J_U$ et que Vect $(S^W) = K_W$ pour tout U de $\mathcal{J}$ et tout W de $\mathcal{M}$.

b. Montrer que $\mathcal{L}(V)$ est la somme directe des J_U, où U décrit $\mathcal{J}$.

$$\mathcal{L}(V) = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} J_U$$

c. Montrer que V est la somme directe des U, où U décrit $\mathcal{J}$ (on pourra utiliser la décomposition de I dans la somme des J_U).

5.*a*. Soit W un élément de $\mathcal{M}$. Montrer que K_W est la somme directe des sous-espaces vectoriels engendrés par les $S_U \cap S^W$ où U décrit $\mathcal{J}$:

$$K_W = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} \text{Vect } (S_U \cap S^W)$$

b. En déduire que $\forall U \in \mathcal{J}\ \forall W \in \mathcal{M}$ Vect $(S_U \cap S^W) = K_W \cap J_U$.

6.*a*. Soit f un élément de $S_U \cap S^W$. Montrer que $f^2 = 0$ ou $f^2 \in S_U \cap S^W$.

b. En déduire que $\forall W \in \mathcal{M}$ et $\forall U \in \mathcal{J}$ ou bien $U \subset W$ ou bien $U \oplus W = V$.

c. Monter que pour tout W de $\mathcal{M}$ il existe au moins un U de $\mathcal{J}$ tel que $U \oplus W = V$.

7. Soit (U, W) un élément de $\mathcal{J} \times \mathcal{M}$ tel que $U \oplus W = V$.

On définit comme suit une application $f \longmapsto \tilde{f}$ de $J_U \cap K_W$ dans $\mathcal{L}(U)$.

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in U$$

a. Montrer que $f \longmapsto \tilde{f}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b. En appliquant B. 3. à $S_U \cap S^W$, montrer que $r = 1$.

c. Montrer que $S_U \cap S^W$ a pour unique élément la projection d'image U et de noyau W.

8.*a*. Montrer que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{M}$ ont chacun n éléments et que $\forall U \in \mathcal{J}\ \forall W \in \mathcal{M}$ $S_U \cap S^W$ est un singleton. On note $\varphi_{U,W}$ l'unique élément de $S_U \cap S^W$.

b. Montrer que :

$$\varphi_{U,W}\,\varphi_{U',W'} = 0 \text{ si } U' \subset W$$
$$= \varphi_{U,W'} \text{ si } U' \oplus W = V.$$

c. Montrer que $\bigcap_{W \in \mathcal{M}} W = \{0\}$.

C. Construction de bases stables.

Soit S une base stable de $\mathcal{L}(V)$.

1. Montrer que l'on peut trouver une base $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ de V, une base $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ de V*, V* étant le dual de V, et une matrice $\Lambda = [\lambda_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ telles que les éléments de S sont n^2 endomorphismes φ_{ij} tels que $\varphi_{ij}(x) = \lambda_{ij}\,\theta_j(x)\,e_i$.

Soit Ω la matrice $[\theta_i(e_j)]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Soit A l'ensemble des couples (i,j) tels que $\theta_i(e_j) \neq 0$.

.../...

2.*a*. Trouver une relation entre λ_{ii}, λ_{ij}, λ_{ki}, $\theta_j(e_k)$ lorsque $(j,k) \in A$. On suppose avoir choisi les bases de V et V* de façon que $\theta_1(e_1) = 1$. On pose $a_i = \lambda_{i1}$ et $b_j = \lambda_{1j}$.

b. Montrer que si $(j, k) \in A \quad \theta_j(e_k) = \dfrac{1}{a_k b_j}$.

c. Montrer qu'il existe une base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de V et une base $(\theta'_1, \ldots, \theta'_n)$ de V* telles que si $(j, k) \in A \quad \theta'_j(e'_k) = 1$ et que les éléments de S sont tels que $\varphi_{ij}(x) = \theta'_j(x)\, e'_i$.

3. On change donc de notation et on suppose donc que $\forall i, j \ \lambda_{ij} = 1$ et si $(j, k) \in A \quad \theta_j(e_k) = 1$.

Montrer que la matrice Ω est inversible et que l'on peut construire ainsi les bases stables de $\mathfrak{L}(V)$.

4. Construire, pour $n = 2$, une base stable de $\mathfrak{L}(V)$ qui ne soit pas une base canoniquement associée à une base de V.